数　学

Ⅰ 解答

(i)

$$x+y=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$$

$$=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{(\sqrt{11}+\sqrt{7})(\sqrt{11}-\sqrt{7})}+\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})}$$

$$=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{4}+\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{11}}{2} \quad \cdots\cdots(答)$$

$$xy=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots(答)$$

(ii)

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{11-2}{1}=9 \quad \cdots\cdots(答)$$

(iii)

$$x^3y+2x^2y^2+xy^3=xy(x^2+2xy+y^2)$$

$$=xy(x+y)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2=\frac{11}{16} \quad \cdots\cdots(答)$$

(iv)

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{y^3}$$

$$=\frac{y^3+xy^2+x^2y+x^3}{x^3y^3}=\frac{(x+y)^3-2xy(x+y)}{(xy)^3}$$

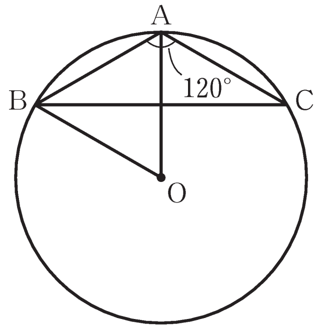
$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^3-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=\frac{88\sqrt{11}-16\sqrt{11}}{1}$$

$$=72\sqrt{11} \quad \cdots\cdots(答)$$

Ⅱ 解答

(i) 円周角と中心角の関係より

$\angle AOB = 2\angle ACB$ ……①



$\triangle ABC$ は二等辺三角形より

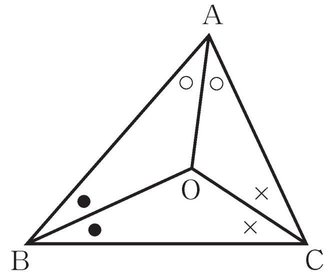
$$\angle ACB = \frac{180° - \angle BAC}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$$

①より　$\angle AOB = 2 \cdot 30° = 60°$

これと，$OA = OB$ から $\triangle OAB$ は正三角形である。

よって　$\angle ABO = 60°$ ……(答)

(ii) $\triangle ABC$ の内心および外心を O とする。



O は $\triangle ABC$ の外心より　$OA = OB$

よって，$\triangle OAB$ は二等辺三角形より

$\angle OAB = \angle OBA$

また，O は $\triangle ABC$ の内心より

$\angle ABC = 2\angle OBA = 2\angle OAB = \angle BAC$ ……①

同様にして　$\angle ACB = \angle BAC$ ……②

①，②より　$\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC$

よって，すべての内角が等しいので，$\triangle ABC$ は正三角形である。

(証明終)

Ⅲ 解答

(i)　$y = -4(x-2)^2 + 12 = -4x^2 + 16x - 4$

$x = 0$ のとき，$y = -4$ より，グラフと y 軸との共有点の座標は

$(0, -4)$ ……(答)

また，$y = 0$ のとき

$$0 = -4x^2 + 16x - 4 \iff x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{3}$$

よって，グラフと x 軸との共有点の座標は

$(2-\sqrt{3}, 0), (2+\sqrt{3}, 0)$ ……(答)

(ii)　$y = -a(x-2)^2 + a^2 - 4$

$x = 0$ のとき，$y = a^2 - 4a - 4$ より，グラフと y 軸との共有点の y 座標は

a^2-4a-4

条件より

$$a^2-4a-4>0 \iff a<2-2\sqrt{2},\ a>2+2\sqrt{2}$$

$a>0$ であるから　　$a>2+2\sqrt{2}$　……(答)

(iii)　$y=-a(x-2)^2+a^2-4$ よりこのグラフの頂点は　　$(2,\ a^2-4)$

よって，グラフが x 軸と接するとき

$$a^2-4=0 \iff (a+2)(a-2)=0$$

$a>0$ より　　$a=2$　……(答)

このとき，$y=-2(x-2)^2$ から求める接点は　　$(2,\ 0)$　……(答)

Ⅳ 解答

(i)　国語のテストの得点の平均値は

$$\frac{39+25+34+44+25+32+39+41+34+27}{10}=\frac{340}{10}=34\text{ 点}$$

……(答)

また，英語のテストの得点の平均値は

$$\frac{27+28+37+36+21+35+44+39+20+33}{10}=\frac{320}{10}=32\text{ 点}$$

……(答)

10 名の生徒の国語と英語のテストの得点の偏差は下表のようになる。

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国語の偏差	5	-9	0	10	-9	-2	5	7	0	-7
英語の偏差	-5	-4	5	4	-11	3	12	7	-12	1

よって，国語のテストの得点の分散は

$$\frac{5^2+(-9)^2+0^2+10^2+(-9)^2+(-2)^2+5^2+7^2+0^2+(-7)^2}{10}$$

$$=\frac{414}{10}=41.4$$　……(答)

英語のテストの得点の分散は

$$\frac{(-5)^2+(-4)^2+5^2+4^2+(-11)^2+3^2+12^2+7^2+(-12)^2+1^2}{10}$$

$$=\frac{550}{10}=55 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(ii) 求める共分散は

$$\frac{5\cdot(-5)+(-9)\cdot(-4)+0\cdot5+10\cdot4+(-9)\cdot(-11)+(-2)\cdot3+5\cdot12+7\cdot7+0\cdot(-12)+(-7)\cdot1}{10}$$

$$=\frac{246}{10}=24.6 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$